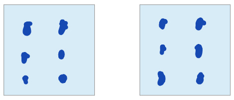
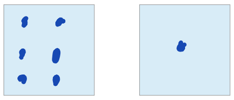
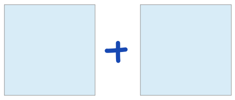
# Zufallsgröße und Erwartungswert

Ziele: - dem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine ...Zahl... zuordnen (Zufallsgröße X)
- Was kann man auf lange Sicht ...erwarten... ? (Erwartungswert E(X))

Bsp.: Spiel mit 2 Würfeln, Einsatz: 1€

 : 9€ Auszahlung  : 5€ Auszahlung  = 8 : 2€ Auszahlung

sonst: Verlust des Einsatzes

X : Nettogewinn (Auszahlung − Einsatz ; in €) pro Spiel

Gewinnmöglichkeiten: $X = 8 \; ; \; 4 \; ; \; 1 \; ; \; -1$ — Diese Werte kann X annehmen.

(9€ − 1€)

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

| $g$ | $8$ | $4$ | $1$ | $-1$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=g)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{28}{36}$ |

$P(X=-1) = 1 - P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{5}{36}\right) = \frac{28}{36}$

$P(X=8) = P(6-6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$P(X=4) = P(6-1) + P(1-6) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$

$P(X=1) = P(5-3) + P(3-5) + P(4-4) + P(6-2) + P(2-6) = 5 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$

**Erwartungswert der Zufallsgröße:**

$$E(X) = 8 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{2}{36} + 1 \cdot \frac{5}{36} - 1 \cdot \frac{28}{36} = -\frac{7}{36} \approx -0{,}194$$

Auf lange Sicht kann man pro Spiel durchschnittlich ca. 19ct Verlust erwarten.

„fair" wäre 0€!

# Bernoulli - Versuche



Ziel: Vereinfachung von Zufallsexperimenten zur besseren Berechnung

| |  |  |  |
|---|---|---|---|
| Erg.: | 6 (1; 2; 3; 4; 5; 6) | 2 (K, Z) | 2 (Treffer, Niete) |
| P: | alle gleich ($\frac{1}{6}$) | alle gleich ($\frac{1}{2}$) | verschieden |

Formel von Laplace

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse, bei denen A eintritt}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Formel von Bernoulli

Def.:

Ein Zufallsexperiment mit nur zwei Ergebnissen (Treffer / Niete) heißt Bernoulli-Versuch

P(Treffer) = p

P(Niete) = q = 1 − p

Bsp.: Münze, Lose, „Eine 6 würfeln", „rote Kugel ziehen, …

Def.

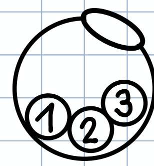
der gleiche mit gleichem p!

Es ist egal, was vorher rauskam

Wenn man einen Bernoulli-Versuch n-mal durchführt und diese unabhängig voneinander sind, dann hat man eine Bernoulli-Kette der Länge n.

# Anzahl der Möglichkeiten

Bsp. (i) Urne mit 3 Kugeln $(n=3)$, Ziehen von 2 Kugeln $(k=2)$



| | mit Zurücklegen | ohne Zurücklegen | mit einem Griff |
|---|---|---|---|
| Möglichkeiten | (1;1) | (1;1) | |
| | (1;2) | (1;2) | (1;2) |
| | (1;3) | (1;3) | (1;3) |
| | (2;1) | (2;1) | (2;1) |
| | (2;2) | (2;2) | |
| | (2;3) | (2;3) | (2;3) |
| | (3;1) | (3;1) | (3;1) |
| | (3;2) | (3;2) | (3;2) |
| | (3;3) | (3;3) | |
| Anzahl der Möglichkeiten | $3\cdot3=3^2=9$ | $3\cdot2=6$ | $\frac{3\cdot2}{2\cdot1}=\binom{3}{2}=3$ |
| Formel für die Anzahl | $n^k$ | $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ | $\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot1}$ |

Reihenfolge egal

fällt raus, da 1 nicht mehr zurückgelegt wird

je 2-1 ergeben das selbe Ergebnis

1. Ziehung: 3 Möglichkeiten
2. Ziehung: 2 Mögl.

„n über k"
TR: 3 nCr 2

heißt Biomialkoeffizient

äquivalente Formel: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

Eigenschaften:

n-te Reihe / k-te Spalte

| n | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 1 |
| 2 | 1 2 1 |
| 3 | 1 3 3 1 |
| 4 | 1 4 6 4 1 |
| ⋮ | |

$1=\binom{4}{0}$, $4=\binom{4}{1}$, $6=\binom{4}{2}$, $4=\binom{4}{3}$, $1=\binom{4}{4}$

PASCAL'sches Dreieck

$\binom{n}{0}=1$

$\binom{n}{1}=n$

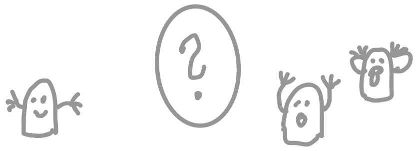
$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

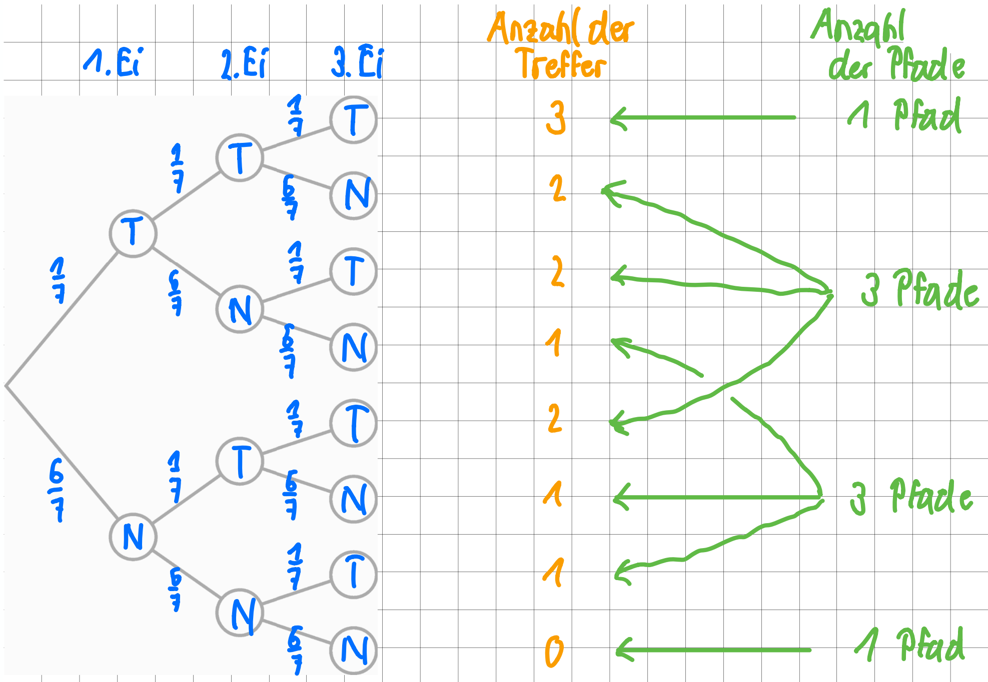
$\binom{n}{n}=1$

# Formel von Bernoulli

Ziele: schnelles Berechnen der Wahrscheinlichkeiten von Bernoulli-Ketten

Bsp.: (i) Nimions-Figuren in jedem 7. Ei. Kauf von 3 Eiern. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für 2 Treffer?






$$P(NTT) = \left(\frac{6}{7}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2$$

X : Anzahl der Treffer

$$P(X=2) = P(TTN) + P(TNT) + P(NTT) = \binom{3}{2} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^1}_{\text{Wahrscheinlichkeit für einen Pfad}} \approx 0{,}053 = 5{,}3\,\%$$

Anzahl der Pfade mit 2 Treffer

**Formel von Bernoulli:**

Die Wahrscheinlichkeit von k Treffern bei einer Bernoulli-Kette der Länge n beträgt

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot \underbrace{p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

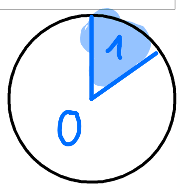
Zufallsgröße X: Anzahl der Treffer

Anzahl der Pfade mit k Treffern

Wahrscheinlichkeit für einen Pfad mit k Treffern und n-k Nieten

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X heißt dann **Binomialverteilung**.

Bsp.: (ii) Glücksrad, p=1/5, 7-Mal drehen. Wahrscheinlichkeit für 3 Treffer?




$$P(X=3) = \binom{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \approx 0{,}115 = 11{,}5\,\%$$

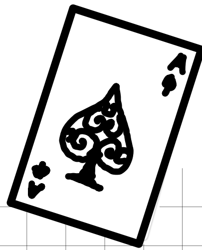
Wahrscheinlichkeit für mehr als 4 Treffer?

$$P(X>4) = P(X=5) + P(X=6) + P(X=7)$$

$$= \binom{7}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \binom{7}{6} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^1 + \binom{7}{7} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^0 \approx 0{,}005 = 0{,}5\,\%$$

# Binomialverteilung

Ziele: Der WTR hilft uns bei häufiger Anwendung der Formel von Bernoulli.



Bsp.: (i) Eine Spielkarte wird nacheinander von 14 Leuten mit p=1/6 umgedreht. Wie wahrscheinlich liegt die gleiche Kartenseite am Schluss oben wie am Anfang?

X: Anzahl der „Kartenumdrehungen"

X ist binomialverteilt mit $n = 14$ und $p = \frac{1}{6}$

gleiche Kartenseite: 0, 2, 4, 6, ... mal wenden, d.h.

TR: DISTR – Binomialpdf $n = 14$; $p = 1/6$; $X = 4$

$P(\text{„gleiche Kartenseite"}) = P(X=0) + P(X=2) + P(X=4) + \dots + P(X=14)$

$\approx 0{,}078 + 0{,}284 + 0{,}125 + 0{,}015$

$+ 0{,}001 + 0{,}000 \approx 0{,}503 \Rightarrow$ ca. 50 %

(ii) Ein Glücksrad wird siebenmal gedreht mit p=1/5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für mehr als 4 Treffer?

X: Anzahl der Treffer; X ist binomialverteilt mit $n = 7$ und $p = \frac{1}{5}$

$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 1 - 0{,}995 = 0{,}005 = 0{,}5\,\%$

TR: DISTR – Binomialcdf; $n = 7$; $p = \frac{1}{5}$; $X = 4$

Wonach kann man fragen?

Wie oft durchführen? Wie viele Treffer? Wie wahrscheinlich soll ein Treffer sein?

$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer? Binomialpdf

" " höchstens " " ? Binomialcdf

(iii) Glücksrad aus (ii): Wie oft muss man min. drehen, damit min. 3 Treffer mit einer Wahrscheinlichkeit von min. 90% kommen?

$n = ?$ ; $p = \frac{1}{5}$ ; $k = 3; 4; 5; \dots; n$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \geq 0{,}9$ d.h. $P(X \leq 2) \leq 0{,}1$

WTR: für $n = 24$ ist $P(X \leq 2) \approx 0{,}1146$

SOLVE AGAIN

für $n = 25$ ist $P(X \leq 2) \approx 0{,}0982 \leq 0{,}1 \Rightarrow$ min. 25 Mal drehen

(iv) Wie groß muss das Trefferfeld min. gemalt werden, damit mehr als vier Treffer zu min. 2% wahrscheinlich sind?

$n = 7$ ; $p = ?$ ; $k = 5; 6; 7$

$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \geq 0{,}02$ d.h. $P(X \leq 4) \leq 0{,}98$

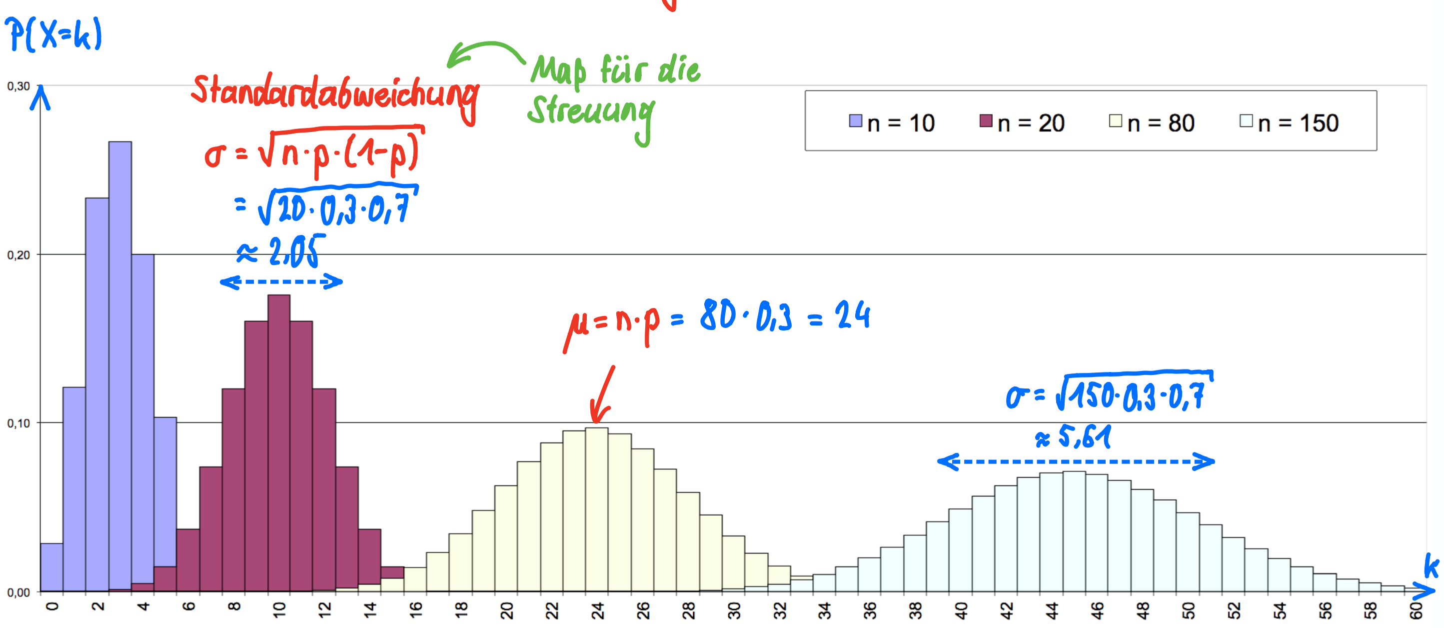
WTR: für $p = 0{,}26$ ist $P(X \leq 4) \approx 0{,}9953$

SOLVE AGAIN

für $p = 0{,}279$ ist $P(X \leq 4) \approx 0{,}9790 \leq 0{,}98 \Rightarrow$ min. ca. 28 % groß

# Binomialverteilung

Alle Graphen der Binomialverteilung haben eine Glockenform. Je größer n ist, desto breiter und flacher werden die Graphen. Der höchste Balken befindet sich am Erwartungswert $\mu$.




Zur Berechnung einer Binomialverteilung ist es sinnvoll, den „Binomialverteilungsknacker“ zu nutzen: